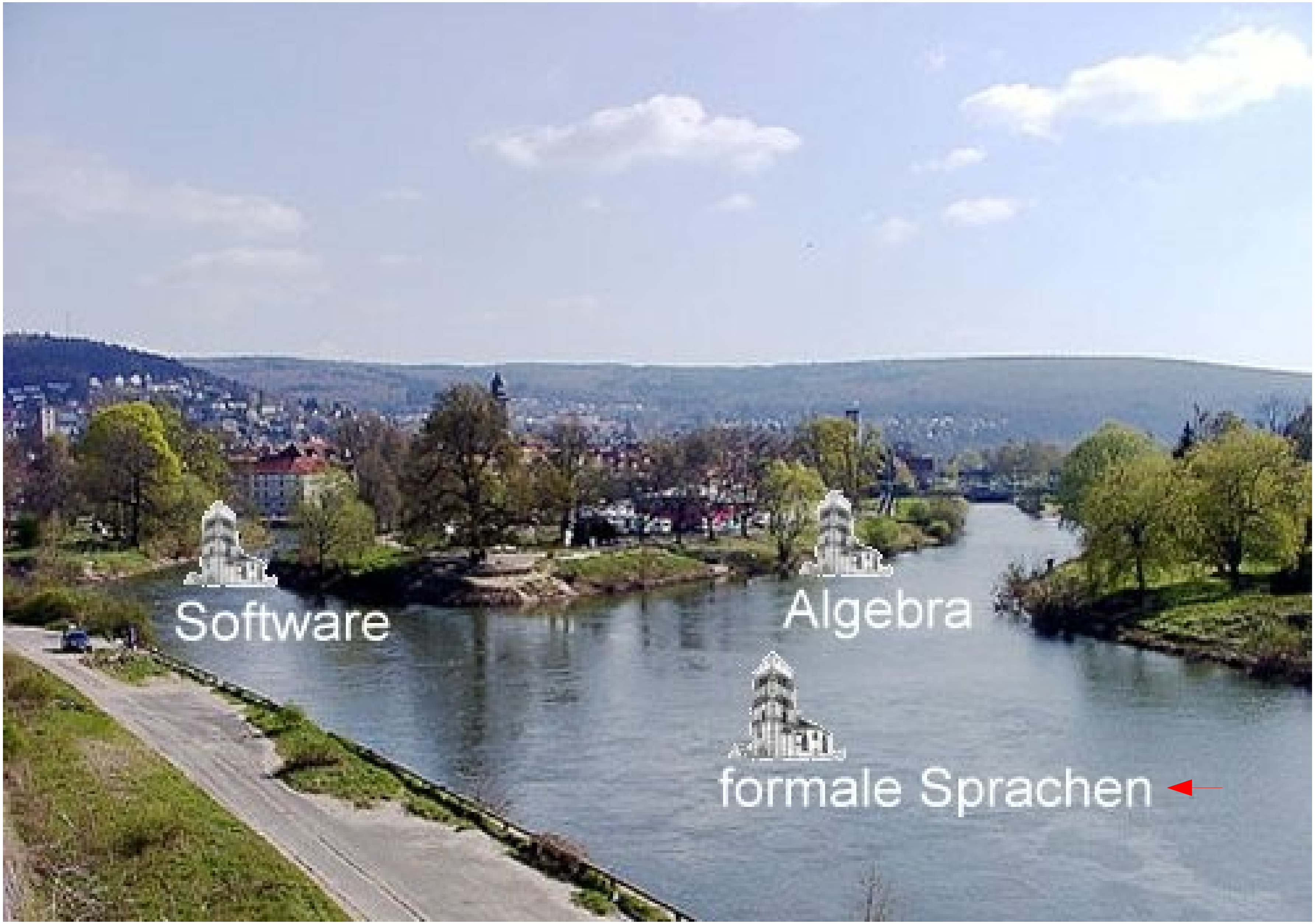
Automaten

mit

Termalphabeten

Jens-D. Doll

1.1 Einordnung der Automaten



1.2 $\mathbb{F}$ = Vektoren über (Polynom-)Ringen

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \qquad G_i(x) = \begin{pmatrix} g_0(x) \\ g_1(x) \\ g_2(x) \\ \dots \\ \dots \\ g_{n-1}(x) \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

$x_i \in R$ (Grundstruktur: Ring, Schiefkörper, Körper)

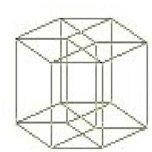
$g_i \in \mathbb{F}$: Modul über dem multivariaten Polynomring $R[x_, x^{-1}]$,
$g_i(x)$ univariat in x_i , weil x_j für $j \neq i$ als Parameter zu betrachten sind

1.3 $\mathbb{L}$ = Logik über den Vektoren

gegeben sei eine Ordnung auf $R[x,x^{-1}]$ und eine Logik $\mathbb{L}$ über $R[x,x^{-1}]$ mit Kombinatoren aus $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ um bedingte Funktionen zu definieren*:

$$F_i(x) \quad := \quad (c_i(x), G_i(x)) \quad := \quad \begin{pmatrix} c_i(x) \\ \\ g_0(x) \\ g_1(x) \\ g_2(x) \\ \ldots \\ \ldots \\ g_{n-1}(x) \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

$c_i(x)$ definieren Polytope im R^n



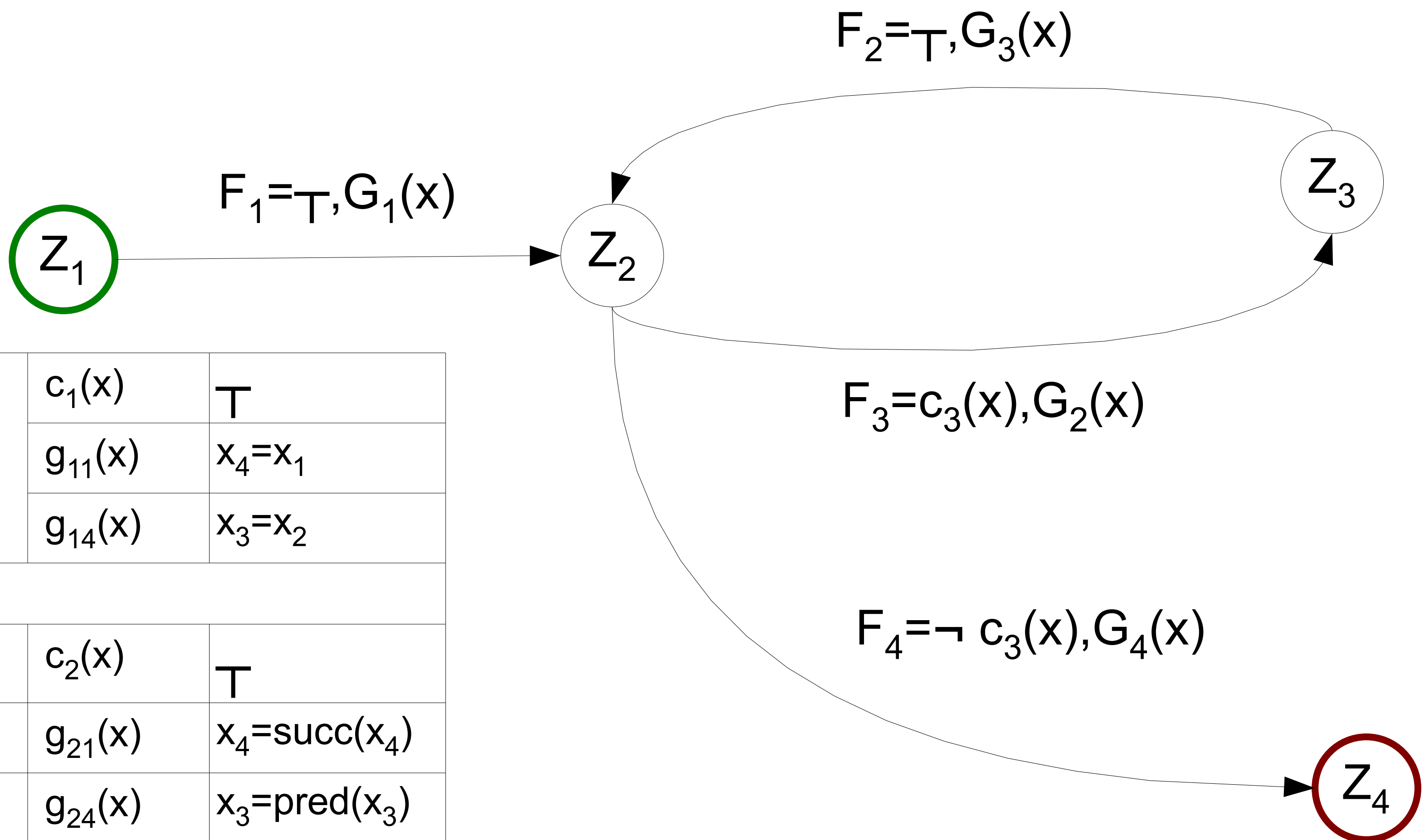
*(≈ guarded command)

1.4 Definition des Termautomaten

Ein Termautomat ist ein Tupel ($\mathbb{T}$, $\mathbb{E}$, Z, S, E, U)

$\mathbb{T}$	Trägermenge T(∑,x) für $\mathbb{F}$ und $\mathbb{L}$
$\mathbb{E}$	$\epsilon\ \mathcal{L}_0$, definiert Axiome für R, $\mathbb{F}$ und $\mathbb{L}$
Z	endlich viele Zustände
S, E	Startzustand, Endzustände
U	Zustandsübergänge ϵ Z x $\mathbb{L}$ x $\mathbb{F}$ x Z mit c(x) T(∑,x) $\longrightarrow$ $\mathbb{L}$ mit F(x) T(∑,x) $\longrightarrow$ T(∑,x) (und ggf. $\forall$ z ϵ Z, k ϵ U, b ϵ $\mathbb{L}$: |k(z,b)| <= 2)

2.1 Beispielautomat



F_1	$c_1(x)$	$\top$
	$g_{11}(x)$	$x_4 = x_1$
	$g_{14}(x)$	$x_3 = x_2$
F_2	$c_2(x)$	$\top$
	$g_{21}(x)$	$x_4 = succ(x_4)$
	$g_{24}(x)$	$x_3 = pred(x_3)$
F_3	$c_3(x)$	$x_3 > 0$
F_4	$\neg\, c_3(x)$	$x_3 \leq 0$

es seien x1, x2 $\in \mathbb{N}^0$ Parameter

2.2 Bildung der transitiven Hülle

1) der Automat definiert die Relation der Zustandsübergänge

2) die Relation hat eine transitive Hülle
(e.g. Warshalls Algorithmus
für gewichtete Graphen)

$$A = \quad F_4 \circ (F_3 \circ F_2)^* \circ F_1 \quad | \quad F_4 \circ F_1$$

Vorsicht: es ist nicht die Kleene-Algebra!

2.3 Reduktion der Hülle

Automat läßt sich eindeutig reduzieren

$A = \; F_4 \text{ o } F_5 \text{ o } F_1 \mid F_6$

mit reduzierten Funktionen

$$F_5 = (F_3 \text{ o } F_2)^* \qquad x_4=x_1+x_2$$
$$F_6 = F_4 \text{ o } F_1 \qquad x_4=0$$

* F_5 wird durch diskrete Integration errechnet, s.u.

3.1 Algebra über den Vektoren

$(x \mid y) \mid z$	$=$	$x \mid (y \mid z)$	(1)	$x \mid y$	$=$	$y \mid x$	(5)
$(x \circ y) \circ z$	$=$	$x \circ (y \circ z)$	(2)	$1 \circ x$	$=$	x	(6)
$(x \mid y) \circ z$	$=$	$x \circ z \mid y \circ z$	(3)	x^*	$=$	$(x^* \circ x) \mid 1$	(7)
$x \circ (y \mid z)$	$=$	$x \circ y \mid x \circ z$	(4)				

$|$:= Disposition

$\circ$:= Komposition

$*$:= Iteration

$x, y, z \in \mathbb{L} \times \mathbb{F}$

es entsteht ein unitärer Semiring

3.2 Dekomposition von Vektoren

$$F(x) = \begin{pmatrix} c(x) \\ \\ f_0(x) \\ f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots \\ \ldots \\ f_{n-1}(x) \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(x) \\ \\ f_0(x) \\ id \\ f_2(x) \\ \ldots \\ \ldots \\ f_{n-1}(x) \\ f_n(x) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c(x) \\ \\ id \\ f_1(x) \\ id \\ \ldots \\ \ldots \\ id \\ id \end{pmatrix}$$

konstant in x_i

rekursiv

3.3 Dekomposition von Vektoren

$$F(x) = \begin{pmatrix} c(x) \\ \\ f_0(x) \\ f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots \\ \ldots \\ f_{n-1}(x) \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(x) \\ \\ f_0(x) \\ id \\ id \\ \ldots \\ \ldots \\ f_{n-1}(x) \\ f_n(x) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c(x) \\ \\ id \\ f_2(x) \\ f_1(x) \\ \ldots \\ \ldots \\ id \\ id \end{pmatrix}$$

konstant in x_i

permutierend

3.4 Operationale Termersetzung

arithmetische Termersetzung

$1 + 0 = 1$
$1 * 1 = 1$

$1 + 1 = 2$

$(2 * 1) \bmod 2 = 0$

$(1 + 1) * (1 - 1) = 0$

...

ist gleichbedeutend mit der

operationalen Ausführung!

3.5 Algebraische Termersetzung

Algebraische Termersetzung

und Normalisierung

$a + 0 = a$
$a * 1 = a$

$a + a = 2 * a$

$(2 * a) \bmod 2 = 0$

$(a + 1) * (a - 1) = a^2 - 1$

...

ist gleichbedeutend mit der

algebraischen Ausführung,

technisch auch Optimierung!

4.1 Interpretation von Variablen

Variable werden nicht als Werte

$$x_i = x_i + 1,$$

sondern als Funktionen interpretiert

$$f(x_i) := f(x_i) + 1,$$

und es wird nach der zu x_i gehörigen Funktion gefragt.

4.2 Diskretes Integral - unbestimmt

$n \in \mathbb{N}^0$ sei der Iterator
$\oint \subseteq \mathbb{F} \to \mathbb{F}$

Konstante	$\oint c \, dx_i$	=	c
Variable	$\oint x_j \, dx_i$	=	x_j
Nachfolger	$\oint succ(x_i) \, dx_i$	=	$x+n$
Vorgänger	$\oint pred(x_i) \, dx_i$	=	$x-n$
Summand	$\oint x_i + c \, dx_i$	=	x_i+n*c
Faktor	$\oint x_i * c \, dx_i$	=	$x_i * c^n$
Kettenregel	$\oint f_i(g_j(x),y) \, dx_i$	=	$\oint f_i(\oint g_j(x) \, dx_j, y) \, dx_i$
Vektoren	$\oint x \, dx$	=	$(\oint x_1 \, dx_1, \ldots \oint x_n \, dx_n)$

Konstanten oder Wörter mit Linksfaktor lassen sich integrieren

4.3 Diskretes Integral - bestimmt

$n \in \mathbb{N}^0$ sei der Iterator,
$b(x)$ das Integrationsgebiet, $b^{-1}(i)$ Umkehrfunktion
$\oint \subseteq \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$

Konstante	${}_{b(x)}\oint c\, dx_i$	=	c
Variable	${}_{b(x)}\oint x_j\, dx_i$	=	x_j
Nachfolger	${}_{b(x)}\oint succ(x_i)\, dx_i$	=	$x+b^{-1}(i)$
Vorgänger	${}_{b(x)}\oint pred(x_i)\, dx_i$	=	$x-b^{-1}(i)$
Summand	${}_{b(x)}\oint x_i+ c\, dx_i$	=	$x_i+b^{-1}(i)*c$
Faktor	${}_{b(x)}\oint x_i* c\, dx_i$	=	$x_i* c^{b^{-1}(i)}$
Kettenregel	${}_{b(x)}\oint f_i(g_j(x),y)\, dx_i$	=	${}_{b(x)}\oint f_i(\oint g_j(x)\, dx_j,y)\, dx_i$
Vektoren	${}_{b(x)}\oint x\, dx$	=	$({}_{b^{-1}(i)}\oint x_1\, dx_1, \ldots {}_{b^{-1}(x)}\oint x_n\, dx_n)$

$b^{-1}(x)$ muß einen Linksfaktor enthalten

4.4 Terminierungsbeweise

Durch die Bildung aller bestimmten diskreten Integrale läßt sich die Termierung dieser Automaten ableiten. Es gilt in dreiwertiger Logik

a) Rechnung terminiert

b) Rechnung terminiert nicht

c) Terminierung nicht errechnet

5 Grenzen und Ziele

Einschränkungen, z.Zt.:

- geschlossene Lösung für Polynome mit deg(p(x))>2
- funktionsalternierende Folgen (e.g. Collatz-Folge)
- komplexe, μ-Rekursion

  ...

Zielvorstellung:

Elegantes Beweissystem für
- prozedurale Sprachen
- Hardwaresprachen
- ...

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit